10 Logarithme Népérien

Objectifs :

- Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction ln
- savoir utiliser, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, l'équivalence $lna = b \Leftrightarrow a = e^b$
- Savoir utiliser la relation fonctionnelle $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$ pour transformer une écriture
- connaître et savoir utiliser $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{lnx}{x} = 0$

Aperçu historique :

Les fonctions logarithmes sont introduites en 1614 par John Napier *(1550-1617), dont le nom, qui en latin s'écrit* Neper*, est à l'origine du terme de « logarithme népérien ». Celui-ci souhaitait trouver une méthode pour faciliter certains calculs de valeurs trigonométriques faisant intervenir des formules d'addition, et a observé qu'il existait des fonctions qui transformaient produits (difficiles à calculer) en sommes (beaucoup plus simples à calculer). Napier dresse des tables de valeurs de ces fonctions et les utilise pour mener à bien des calculs explicites. Par ailleurs diverses personnes dont* Grégoire de Saint-Vincent *avaient calculé l'aire délimité par l'axe des abscisses et l'arc d'hyperbole (graphe de la fonction inverse), sans forcément faire le lien avec les fonctions logarithmes de Napier, et il faut attendre 1661 pour que* Christian Huygens *(1629-1695) fasse ce lien. Les fonctions exponentielles de base $a > 0$ (du type $y = a^x$) étaient semble-t-il connues de la communauté en général. Puis en 1624* Briggs*(1561-1630) donne l'approximation du logarithme décimal d'un nombre qu'il n'identifie pas avec précision, mais qui se révèle être e. Briggs a lu les travaux de Napier sur les logarithmes, et les a poursuivis. C'est* Euler *(1707-1783) qui donne le développement en série de l'exponentielle ($e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$), introduit en 1731 la notation avec la lettre e et surtout est le premier à faire intervenir les fonctions trigonométriques et exponentielles comme solutions d'équations différentielles (équation mettant en jeu une fonction et ses dérivées successives). On lui doit aussi la formule $e^{i\pi} + 1 = 0$.*

John Napier

Christian Huygens

1. Première définition, en tant que primitive de la fonction inverse.

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$, et en particulier sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet donc des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.

> **Définition 10.1** On appelle *fonction logarithme népérien* la fonction qui, sur $\mathbb{R}_+^*$, est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1.

On la note $\ln(x)$, ou (plus ancien) $\mathscr{L}og(x)$, $Log(x)$, $log_e(x)$.

Attention ! $log(x)$ ne désigne pas le logarithme népérien mais le logarithme base 10, et $log_a(x)$ le logarithme base a. La touche logarithme népérien de la calculatrice est généralement notée `ln` ou `LN` (à ne pas confondre avec la touche `log`).

2. Deuxième définition, en tant que réciproque de l'exponentielle.

Définition 10.2 Pour tout $x > 0$, l'équation $e^y = x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. La fonction qui a tout $x > 0$ associe ce réel y tel que $e^y = x$ est appelée logarithme népérien. On la note $\ln$.

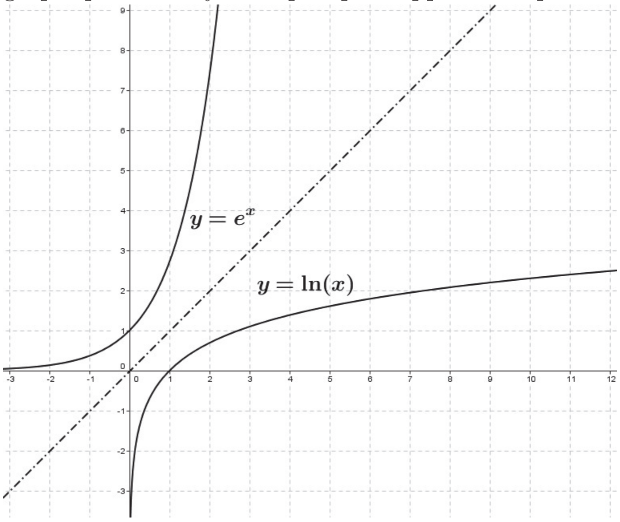
Exemple 10.1 On déduit de cette définition :
- $\ln(1)$ est le réel y tel que $e^y = 1$ donc $\ln(1) = 0$;
- $\ln(e)$ est le réel y tel que $e^y = e$ donc $\ln(e) = 1$;
- $\ln(e^2)$ est le réel y tel que $e^y = e^2$ donc $\ln(e^2) = 2$;
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$ est le réel y tel que $e^y = \frac{1}{e} = e{-1}$ donc $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Conséquence : pour tout $x > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^y = x \Longleftrightarrow y = \ln(x)$$

Remarque 10.1 Si $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $e^{\ln(x)} = x$. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $\ln(e^x) = x$.

Interprétation graphique : Les fonction sln et exp étant réciproques l'une de l'autre, leurs représentations graphiques sont symétriques par rapport à la première diagonale ($y = x$) :



3. Propriétés algébriques

Propriété 10.1

1) pour $x > 0$ et $y > 0$, on a $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$;
2) pour $x > 0$ on a $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$;
3) pour $x > 0$ et $y > 0$ on a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$;
4) pour $x > 0$ et $p \in \mathbb{Z}$ on a $\ln(x^p) = p\ln(x)$;
5) pour $x > 0$ on a $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$.

Démonstration :

1) On a $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)}e^{\ln(y)} = xy$. En prenant le logarithme népérien de chacun des membres de cette égalité on obtient $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.
2) On a $e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$. En prenant le logarithme népérien on obtient $-\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.
3) On a $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln\left(x \times \frac{1}{y}\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
4) On a $e^{p\ln(x)} = \left(e^{\ln(x)}\right)^p = x^p$. En prenant le logarithme népérien on obtient $p\ln(x) = \ln(x^p)$.
5) Enfin, puisque $x > 0$ on a $\ln(x) = \ln\left((\sqrt{x})^2\right) = 2\ln(\sqrt{x})$.

Remarque 10.2 (Attention !) On a $\ln((-4)\times(-5)) = \ln(20)$ mais ni $\ln(-4)$ ni $\ln(-5)$ ne sont définis.
De même, on ne peut la transformer en une somme l'expression $\ln((x+3)(x+1))$, que si $x+3$ et $x+1$ sont strictement positifs.

Exemple 10.2 Soit f et g définies respectivement par $f(x) = \ln(x+2) + \ln(x-4)$ et $g(x) = \ln((x+2)(x-4))$.
Déterminer les ensembles de définition de f et g. Peut-on conclure que $f = g$?

Remarque 10.3 Les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont chacune solution d'une **équation fonctionnelle** :
- la fonction exponentielle vérifie pour tout x et y, $f(x+y) = f(x)f(y)$;
- la fonction logarithme népérien vérifie pour tout x et y, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

4. Étude de la fonction logarithme népérien

Dans cette partie, on note $f : x \mapsto \ln(x)$.
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $L = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}$ si cette limite existe.
En posant $X = \ln(x)$ et $A = \ln(a)$ on a :

$$L = \lim_{X\to A} \frac{X-A}{e^X - e^A} = \lim_{X\to A} \frac{1}{\frac{e^X-e^A}{X-A}} = \frac{1}{e^A} = \frac{1}{a}$$

En effet, la fonction exponentielle est égale à sa dérivée donc pour tout A, $\lim_{X\to A} \frac{e^X-e^A}{X-A} = e^A$.
Donc la fonction f est dérivable en a donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $\ln'(x) = \frac{1}{x}$: la dérivée de la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction inverse qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient donc le tableau de variation suivant (les calculs de limites seront démontrés par la suite) :

x	0		1		$+\infty$
$\frac{1}{x}$	‖	$+$		$+$	
$\ln$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Remarque 10.4 (Conséquence) Pour $x < 1$ on a $\ln(x) < 0$ et pour $x > 1$ on a $\ln(x) > 0$.

Calcul des limites :
- on veut montrer que pour tout $A > 0$ il existe un réel α tel que si $x > \alpha$ alors $\ln(x) > A$ (c'est-à-dire que $\ln(x)$ peut être aussi grand qu'on le souhaite). La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, $\ln(x) > A \iff e^{\ln(x)} > e^A$.
  Donc pour tout $x \geq e^A + 1$ on a $\ln(x) \geq \ln(e^A+1) > \ln e^A = A$. Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

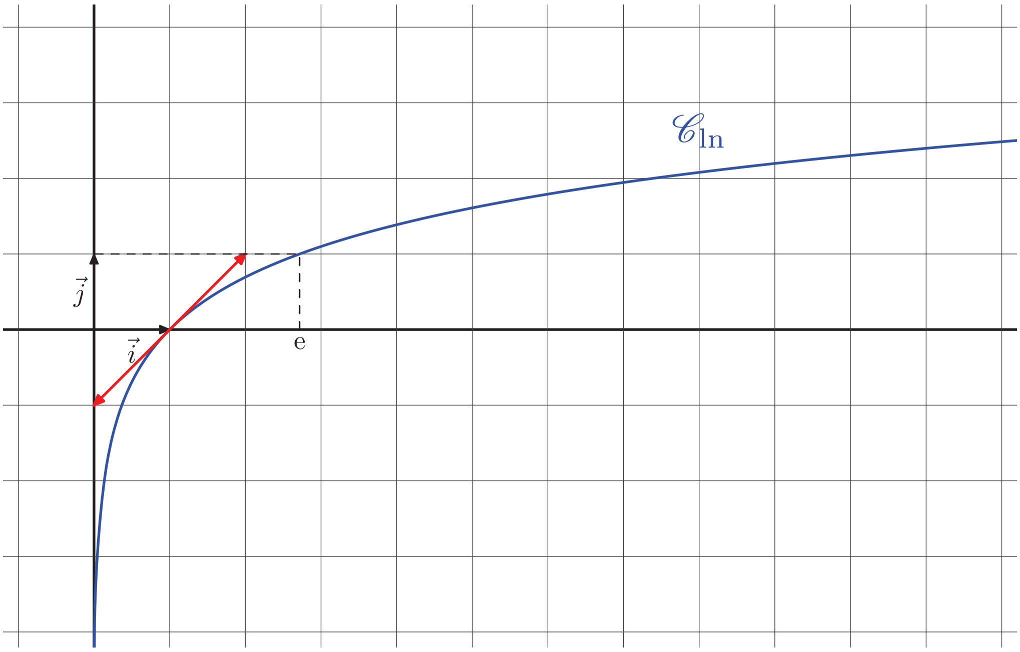
- en posant $X = \frac{1}{x}$, on a :

$$\lim_{x\to0^+} \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} \ln\left(\frac{1}{X}\right) = \lim_{X\to+\infty} -\ln(X) = -\lim_{X\to+\infty} \ln(X) = -\infty$$

Conséquence graphique : la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
Approximation affine au voisinage de 1 :
on a $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$ donc :

$$\ln(x) = (x-1) + (x-1)\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to1} \epsilon(x) = 0$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation $y = x - 1$.
Courbe représentative :



5. Applications

A. Composée avec la fonction $\ln$

Propriété 10.2 Soit u une fonction définie sur un intervalle I et à valeurs strictement positives (on écrit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$).
Alors la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a :

$$(\ln \circ u)' = \frac{u'}{u}$$

Démonstration : il suffit d'appliquer le théorème 7.1 de la page 87.

Exemple 10.3 Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 + x + 1 > 0$ donc la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Conséquence pour l'équation différentielle $y' = y$:
$y' = y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = 1 \Leftrightarrow [\ln(y)]' = 1 \Rightarrow \ln(y) = x \Rightarrow y = e^x$

B. Quelques limites à connaître

Propriété 10.3

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0; \qquad \lim_{x \to 0+} x\ln(x) = 0; \qquad \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

Démonstration En posant $t = \ln(x)$ on a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{t \to +\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^t}{t}} = 0$$

En posant $t = \frac{1}{x}$ on a :

$$\lim_{x \to 0^+} x\ln(x) = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln(\frac{1}{t})}{t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{-\ln(t)}{t} = 0$$

Enfin la dernière limite est le nombre dérivé de $\ln$ en 1 soit $\frac{1}{1} = 1$.

C. Équations. Inéquations

Théorème 10.1 Soient a et b deux réels strictement positifs. Alors :
- on a $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$;
- on a $a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$.

Démonstration : la fonction ln est strictement croissante et continue.

D. Logarithme décimal

En physique, vous avez sûrement vu que le pH d'une solution est donné par la relation $\text{pH} = -\log\left([\text{H}_3\text{O}^+]\right)$. Dans cette expression, le `log` n'est pas le logarithme népérien mais le logarithme décimal. C'est la fonction qui à tout $x > 0$ associe l'unique solution y de l'équation $10^y = x$. Ainsi, si $\left[\text{H}_3\text{O}^+\right] = 10^{-3}$ alors $\text{pH} = 3$.

Définition 10.3 La fonction logarithme décimal est la fonction notée $\log$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Exemple 10.4 On a $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$ et pour tout $p \in \mathbb{Z}$, $\log(10^p) = p$.

Propriété 10.4 Pour tout a et tout b de $\mathbb{R}_+^*$ on a $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

Démonstration : conséquence directe de la définition **??** et de la propriété **??**.

Remarque 10.5 De la même façon, pour tout $a > 0$ on peut définir sur $\mathbb{R}_+^*$ le logarithme de base a, noté $\log_a$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$